BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2011

RİYAZİYYAT

УДК-517.946

ОБ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С НАКЛОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М.Ф.МЕХТИЕВ, Н.А.АЛИЕВ, Н.И.ФОМИНА
Бакинский Государственный Университет
Fomina1109@mail.ru

Рассматривается граничная задача с наклонными производными в трехмерном пространстве с границами – поверхностями типа Ляпунова. Исследуется фредгольмовость граничных задач. Метод исследования опирается на необходимые условия. Преимуществом по сравнению с теорией потенциала является то, что у нас нет предельного перехода, мы пользуемся граничными значениями, которые получаются из основных соотношений, называемых необходимыми условиями. Отметим, что направления производных, которые даются в граничных условиях являются произвольными. Некоторым подмножеством задаваемых направлений могут быть и касательные направления.

Ключевые слова: наклонная производная, необходимые условия, регуляризация

Как известно из [1], [12], [14], [19], [20] формулы скачков, полученные как для нормальной производной потенциала простого слоя, так и для самого потенциала двойного слоя, дают возможность свести граничные задачи Неймана и Дирихле к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Что касается задач с наклонными производными, то они исследованы полностью лишь в двумерном случае, благодаря методам теории функций комплексного переменного [12], [20].

Для трехмерного случая, как было отмечено у Бицадзе А.В. в [12], «поскольку теории трехмерного аналога задачи Римана-Гильберта не имеется, такая редукция мало полезна». В этом случае для общего линейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, когда данные направления на гладкой границе области составляют острый угол с внешними нормалями, исследован в [1] [2]. С помощью понятия символа результаты Ж.Жиро [1], [2] получены намного проще в [7], [9].

Случай плоской системы уравнений второго порядка, когда главная часть является оператором Лапласа, рассмотрен в [3], [5], [12]. Была установлена конечность индекса задачи, явно выписано необходимое и достаточное условие разрешимости задачи и, наконец, показано, что на характере задачи существенно сказывается наличие младших членов, входящих в граничное условие, если коэффициенты при производной удовлетворяют некоторым равенствам.

Далее было установлено, что если наклонная касается в некотором конечном числе точек границы Γ, или же в некотором конечном числе линий на Γ данный наклон является касательным для этой линии, то ядро рассматриваемого оператора конечномерно, т.е. решение задачи не единственно [12], [16], [17]. Эти результаты двумерных задач (начало исследования берется из монографии [4]) обобщены в работах [12], [13].

В трехмерном случае формула индекса для задачи с наклонными производными системы уравнений Лапласа приведена без доказательства А.И.Вольпертом [8]. Далее отметим, что индексам граничных задач в абстрактном случае посвящена работа группы математиков [18].

Задача с наклонной производной в трехмерном евклидовом пространстве исследована А.Янущаускасом [15]. Получено условие безусловной разрешимости задачи. Отметим, что в работе [16] для однозначной разрешимости приводится дополнительное условие вдоль линии, лежащей на границе, и задача сводится к задаче Дирихле.

Наконец отметим, что существующие, например в [11], предельные теоремы для тангенциальной производной потенциала простого и двойного слоя, а также для нормальной производной потенциала двойного слоя, к сожалению, не нашли применения при решении граничных задач для эллиптических уравнений.

Излагаемая работа посвящена вопросу разрешимости граничной задачи с наклонными производными в трехмерном пространстве.

Постановка задачи принадлежит Бицадзе А.В. [10], [12].

Итак, рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0, \qquad x \in D \subset R^3, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \alpha(x), \qquad x \in \Gamma = \overline{D} \setminus D, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{D}$ – ограниченная область с границей $\boldsymbol{\Gamma}$.

Пусть имеют место следующие ограничения:

I^0. Граница $\boldsymbol{\Gamma}$ ограниченной области $D \subset R^3$ – поверхность Ляпунова.

2^0. Коэффициенты $\alpha_j(x)$ $\left(j = \overline{1,3}\right)$ граничного условия (2) принадлежат некоторому классу Гельдера, а $\alpha(x)$ – непрерывная функция.

Тогда справедлива

Теорема I . При условии I^0 всякое решение уравнения (1), определенное в $\boldsymbol{D}$, удовлетворяет соотношениям:

$$u(x) = 2\int_{\Gamma} \frac{dU(x-\xi)}{dn_\xi} u(\xi)\, d\xi - 2\sum_{j=1}^{3} \int_{\Gamma} U(x-\xi) \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j} \cos(n_\xi, x_j)\, d\xi;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 2\int_{\Gamma} \frac{dU(x-\xi)}{dn_\xi} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i} d\xi + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} \int_{\Gamma} \Bigg[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_i} \cos(n_\xi, x_j) - \\ - \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_j} \cos(n_\xi, x_i) \Bigg] \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j} d\xi, \qquad \left(i = \overline{1,3},\ x \in \Gamma\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $U(x-\xi)$ – фундаментальное решение уравнения (1), а $\boldsymbol{n_\xi}$ – внешняя нормаль к границе $\boldsymbol{\Gamma}$ в точке $\boldsymbol{\xi}$.

Действительно, первое из выражений (3) известно из общего курса уравнений математической физики [11]. Для доказательства второго выражения поступим следующим образом. Предполагая, что $\boldsymbol{u(x)}$ – решение уравнения (1), умножая обе части этого уравнения, написанного в точке $\boldsymbol{\xi}$, на функцию $\dfrac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_k}$, где $U(x-\xi)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, интегрируя по области $\boldsymbol{D}$ и применяя формулу Гаусса-Остроградского [19], получим:

$$0 = \int_D \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_j^2} d\xi = \int_D \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_k^2} d\xi + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{3} \int_D \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_j^2} d\xi =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_k} \cos(n_\xi, x_k)\, d\xi - \int_D \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial \xi_k^2} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{3} \int_\Gamma \Bigg[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j} \cos(n_\xi, x_j) -$$

$$- \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j} \cos(n_\xi, x_k) + \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_k} \cos(n_\xi, x_j) \Bigg] d\xi - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{3} \int_D \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial \xi_j^2} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_k} d\xi,$$

или же

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_k} d\xi + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{3} \int_\Gamma \Bigg[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_k} \cos(n_\xi, x_j) - \\ - \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_j} \cos(n_\xi, x_k) \Bigg] \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j} d\xi = \int_D \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial \xi_j^2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_k} d\xi. \end{aligned}$$

Из этого следует второе выражение из (3), если учитывать, что $U(x-\xi)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа [11], [12], [14].

Таким образом, для неизвестных функций $u(x)$, $\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}$, $\left(j=\overline{1,3}\right)$ имеем пять соотношений: граничное условие (2) и четыре выражения, входящие в (3). Отметим, что последние три соотношения содержат сингулярные интегралы.

Далее, постараемся эти три соотношения заменить двумя, в которые не входят сингулярные интегралы. Для этого, учитывая, что фундаментальное решение уравнения Лапласа имеет вид [14]

$U(x-\xi)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi|}$,

принимая обозначения

$$K_{ij}(x,\xi)=\cos(x-\xi,x_j)\cos(n_\xi,x_i)-\cos(x-\xi,x_i)\cos(n_\xi,x_j);\quad \left(i,j=\overline{1,3}\right) \quad ,(4)$$

составим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\beta_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}&=2\int_\Gamma\frac{dU(x-\xi)}{dn_\xi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_i}\beta_i(x)\,d\xi+\\&+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d\xi}{|x-\xi|^2}\Big[\big(K_{12}(x,\xi)\beta_2(x)+K_{13}(x,\xi)\beta_3(x)\big)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}+\\&+\big(K_{21}(x,\xi)\beta_1(x)+K_{23}(x,\xi)\beta_3(x)\big)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}+\\&+\big(K_{31}(x,\xi)\beta_1(x)+K_{32}(x,\xi)\beta_2(x)\big)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big],\end{aligned}\tag{5}$$

где неизвестные $\beta_i(x)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ определим из системы:

$$\begin{cases}K_{12}(\xi,\xi)\beta_2(\xi)+K_{13}(\xi,\xi)\beta_3(\xi)=\alpha_1(\xi),\\K_{21}(\xi,\xi)\beta_1(\xi)+K_{23}(\xi,\xi)\beta_3(\xi)=\alpha_2(\xi),\\K_{31}(\xi,\xi)\beta_1(\xi)+K_{32}(\xi,\xi)\beta_2(\xi)=\alpha_3(\xi).\end{cases}\tag{6}$$

Тогда из представления (4) легко следует следующее свойство:

$$K_{ij}(x,\xi)+K_{ji}(x,\xi)=0,\quad (i,j=1,3),$$

с помощью которого основной определитель системы (6) обращается в нуль, т.е. ранг основной матрицы равен двум. Для вычисления ранга расширенной матрицы обозначим через $(x-\xi)^0$ и n_ξ^0 единичные векторы по направлению $x-\xi$ и n_ξ. Тогда

$$\begin{aligned}&(x-\xi)^0=\big(\cos(x-\xi,x_1),\ \cos(x-\xi,x_2),\ \cos(x-\xi,x_3)\big),\\&n_\xi^0=\big(\cos(n_\xi,x_1),\ \cos(n_\xi,x_2),\ \cos(n_\xi,x_3)\big).\end{aligned}$$

Рассмотрим единичный вектор $\sigma^0(x,\xi)$, определенный следующим образом:

$$\sigma^0(x,\xi) = \left[(x-\xi)^0, n_\xi^0\right].$$

Принимая во внимание (4), для $\sigma^0(x,\xi)$ получим

$$\sigma^0(x,\xi) = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \cos(x-\xi,\ x_1) & \cos(x-\xi,\ x_2) & \cos(x-\xi,\ x_3) \\ \cos(n_\xi,\ x_1) & \cos(n_\xi,\ x_2) & \cos(n_\xi,\ x_3) \end{vmatrix} =$$

$$= \big((\cos(x-\xi,\ x_2)\cos(n_\xi,\ x_3) - \cos(x-\xi,\ x_3)\cos(n_\xi,\ x_2)),$$

$$-(\cos(x-\xi,\ x_1)\cos(n_\xi,\ x_3) - \cos(x-\xi,\ x_3)\cos(n_\xi,\ x_1)),$$

$$(\cos(x-\xi,\ x_1)\cos(n_\xi,\ x_2) - \cos(x-\xi,\ x_2)\cos(n_\xi,\ x_1))\big)$$

$$= (K_{23}(x,\xi), K_{31}(x,\xi), K_{12}(x,\xi)).$$

Таким образом, $K_{ij}(x,\xi)$ являются направляющими косинусами единичного вектора, лежащего на касательной плоскости, проведенного к границе $\boldsymbol{\Gamma}$ в точке $\boldsymbol{\xi}$. Далее, принимая обозначения:

$$\lim_{x\to\xi}(x-\xi)^0 = \tau_\xi^0, \quad \lim_{x\to\xi}\sigma^0(x,\xi) = \sigma_\xi^0,$$

легко видеть, что $(\tau_\xi^0,\ n_\xi^0,\ \sigma_\xi^0)$ образуют правильную тройку, т.е. они ортонормированы и направлены так, что их смешанное произведение равно единице.

Теперь вычислим ранг расширенной матрицы системы (6)

$$\begin{pmatrix} 0 & K_{12}(\xi,\ \xi) & K_{13}(\xi,\ \xi) & \alpha_1(\xi) \\ K_{21}(\xi,\ \xi) & 0 & K_{23}(\xi,\ \xi) & \alpha_2(\xi) \\ K_{31}(\xi,\ \xi) & K_{32}(\xi,\ \xi) & 0 & \alpha_3(\xi) \end{pmatrix}.$$

Так как первый определитель третьего порядка обращается в нуль, рассмотрим следующие определители:

$$\begin{vmatrix} 0 & K_{12} & \alpha_1 \\ K_{21} & 0 & \alpha_2 \\ K_{31} & K_{32} & \alpha_3 \end{vmatrix} = K_{12}K_{31}\alpha_2 + K_{21}K_{32}\alpha_1 - K_{12}K_{21}\alpha_3 =$$

$$= K_{21}(\xi,\xi)\left[K_{32}(\xi,\xi)\alpha_1(\xi) + K_{13}(\xi,\xi)\alpha_2(\xi) + K_{21}(\xi,\xi)\alpha_3(\xi)\right] =$$

$$= K_{12}(\xi,\xi)\left[K_{23}(\xi,\xi)\alpha_1(\xi) + K_{31}(\xi,\xi)\alpha_2(\xi) + K_{12}(\xi,\xi)\alpha_3(\xi)\right] =$$

$$= K_{12}(\xi,\xi)\left(\sigma_\xi^0, \overline{\alpha}(\xi)\right),$$

где $\overline{\alpha}(\xi) = (\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi), \alpha_3(\xi))$.

$$\begin{vmatrix} 0 & K_{13} & \alpha_1 \\ K_{21} & K_{23} & \alpha_2 \\ K_{31} & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = K_{13}K_{31}\alpha_2 - K_{31}K_{23}\alpha_1 - K_{13}K_{21}\alpha_3 =$$

$$= K_{13}\left[K_{23}\alpha_1 + K_{31}\alpha_2 + K_{12}\alpha_3\right] = K_{13}(\xi,\xi)\left(\sigma_\xi^0, \overline{\alpha}(\xi)\right),$$

и, наконец,

$$\begin{vmatrix} K_{12} & K_{13} & \alpha_1 \\ 0 & K_{23} & \alpha_2 \\ K_{32} & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = K_{12}K_{23}\alpha_3 + K_{13}K_{32}\alpha_2 - K_{23}K_{32}\alpha_1 = K_{23}(\xi,\xi)\left(\sigma_\xi^0, \overline{\alpha}(\xi)\right).$$

Из полученных выражений следует, что для совместности системы (6) по теореме Кронекера-Капелли ранг расширенной матрицы должен быть равен двум. Тогда, учитывая единичность вектора $\boldsymbol{\sigma}_{\xi}^{0}$, получим:

$$\left(\sigma_\xi^0,\ \overline{\alpha}(\xi)\right) = 0\,. \tag{7}$$

Замечание: Как видно из постановки задачи, вектор $\overline{\alpha}(\xi)$ не зависит от нас. Поэтому, для того чтобы выполнялось (7), достаточно для каждой $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Gamma}$, точку $\boldsymbol{\xi}$ устремить ($\boldsymbol{\xi}$ является интегральной переменной) к точке $\boldsymbol{x}$ целесообразным образом.

Тогда из системы (6) (эта система в векторных обозначениях имеет вид:
$\left[\overline{\beta}(\xi)\ \sigma_\xi^0\right] = \overline{\alpha}(\xi)$) для вектора

$$\overline{\beta}(\xi) = \left(\beta_1(\xi),\ \beta_2(\xi),\ \beta_3(\xi)\right)$$

получим два линейно-независимых решения.

Обозначим их через

$$\overline{\beta}^{(k)}(\xi) = \left(\beta_1^{(k)}(\xi),\ \beta_2^{(k)}(\xi),\ \beta_3^{(k)}(\xi)\right), \quad (k = 1,2)\ . \tag{8}$$

Заметим, что если $K_{12}(\xi,\xi) \neq 0$, то тогда

$$\overline{\beta}^{(1)}(\xi) = \left(-\frac{\alpha_2(\xi)}{K_{12}(\xi,\xi)},\ \frac{\alpha_1(\xi)}{K_{12}(\xi,\xi)},\ 0\right),$$

$$\overline{\beta}^{(2)}(\xi) = \left(K_{23}(\xi,\xi) - \frac{\alpha_2(\xi)}{K_{12}(\xi,\xi)},\ \frac{\alpha_1(\xi)}{K_{12}(\xi,\xi)} - K_{13}(\xi,\xi),\ K_{12}(\xi,\xi)\right)$$

являются линейно-независимыми решениями системы (6). Так как σ_ξ^0 – единичный вектор, то один из компонентов должен быть отличен от нуля.

Таким образом, с учетом (8) из (5) получим:

$$\sum_{i=1}^{3}\beta_i^{(k)}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}=2\int_\Gamma\frac{dU(x-\xi)}{dn_\xi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}\beta_i^{(k)}(x)d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d\xi}{|x-\xi|^2}\Big[\Big(K_{12}(x,\xi)\beta_2^{(k)}(x)+$$

$$+K_{13}(x,\xi)\beta_3^{(k)}(x)-\eta K_{12}(\xi,\xi)\beta_2^{(k)}(\xi)-\eta K_{13}(\xi,\xi)\beta_3^{(k)}(\xi)\Big)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}+$$

$$+\Big(K_{21}(x,\xi)\beta_1^{(k)}(x)+K_{23}(x,\xi)\beta_3^{(k)}(x)-\eta K_{21}(\xi,\xi)\beta_1^{(k)}(\xi)-\eta K_{23}(\xi,\xi)\beta_3^{(k)}(\xi)\Big)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}+$$

$$+\Big(K_{31}(x,\xi)\beta_1^{(k)}(x)+K_{32}(x,\xi)\beta_2^{(k)}(x)-\eta K_{31}(\xi,\xi)\beta_1^{(k)}(\xi)-\eta K_{32}(\xi,\xi)\beta_2^{(k)}(\xi)\Big)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\eta d\xi}{|x-\xi|^2}\alpha(\xi)\qquad x\in\Gamma,\quad \left(k=\overline{1,2}\right),$$

где $\eta=\eta(x-\xi)$, $|\eta|=1$.

Тем самым установлена:

Теорема 2. При условии 1^0– 2^0 для решения задачи (1), (2) справедливы следующие регулярные соотношения:

$$\sum_{i=1}^{3}\beta_i^{(k)}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}=2\int_\Gamma\frac{dU(x-\xi)}{dn_\xi}\sum_{i=1}^{3}\beta_i^{(k)}(x)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d\xi}{|x-\xi|^2}\Big\{\Big[\Big(K_{12}(x,\xi)-$$

$$-\eta K_{12}(\xi,\xi)\Big)\beta_2^{(k)}(x)+\eta K_{12}(\xi,\xi)\Big(\beta_2^{(k)}(x)-\beta_2^{(k)}(\xi)\Big)+\Big(K_{13}(x,\xi)-\eta K_{13}(\xi,\xi)\Big)\beta_3^{(k)}(x)+$$

$$+\eta K_{13}(\xi,\xi)\Big(\beta_3^{(k)}(x)-\beta_3^{(k)}(\xi)\Big)\Big]\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}+\Big[\Big(K_{21}(x,\xi)-\eta K_{21}(\xi,\xi)\Big)\beta_1^{(k)}(x)+$$

$$+\eta K_{21}(\xi,\xi)\Big(\beta_1^{(k)}(x)-\beta_1^{(k)}(\xi)\Big)+\Big(K_{23}(x,\xi)-\eta K_{23}(\xi,\xi)\Big)\beta_3^{(k)}(x)+\eta K_{23}(\xi,\xi)\times$$

$$\times\Big(\beta_3^{(k)}(x)-\beta_3^{(k)}(\xi)\Big)\Big]\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}+\Big[\Big(K_{31}(x,\xi)-\eta K_{31}(\xi,\xi)\Big)\beta_1^{(k)}(x)+\eta K_{31}(\xi,\xi)\times$$

$$\times\Big(\beta_1^{(k)}(x)-\beta_1^{(k)}(\xi)\Big)+\Big(K_{32}(x,\xi)-\eta K_{32}(\xi,\xi)\Big)\beta_2^{(k)}(x)+ \tag{9}$$

$$+\eta K_{32}(\xi,\xi)\Big(\beta_2^{(k)}(x)-\beta_2^{(k)}(\xi)\Big)\Big]\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\Big\}+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\alpha(\xi)\frac{\eta d\xi}{|x-\xi|^2},\qquad x\in\Gamma,\quad \left(k=\overline{1,2}\right).$$

Теорема 3. При условиях 1^0– 2^0 , если $\left|\overline{\alpha}(\xi)\right|\neq 0$, то векторы $\overline{\alpha}(\xi)$, $\overline{\beta}^{(1)}(\xi)$ и $\overline{\beta}^{(2)}(\xi)$ – линейно независимы.

Действительно, не ограничивая общности, предполагая, что $K_{12}(\xi,\xi)\neq 0$, имеем:

$$\left(\overline{\alpha}(\xi)\ \overline{\beta}^{(1)}(\xi)\ \overline{\beta}^{(2)}(\xi)\right)=\begin{vmatrix}\alpha_1(\xi) & \alpha_2(\xi) & \alpha_3(\xi)\\ -\dfrac{\alpha_2(\xi)}{K_{12}(\xi,\xi)} & \dfrac{\alpha_1(\xi)}{K_{12}(\xi,\xi)} & 0\\ K_{23}-\dfrac{\alpha_2(\xi)}{K_{12}(\xi,\xi)} & \dfrac{\alpha_1(\xi)}{K_{12}(\xi,\xi)}-K_{13} & K_{12}\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1^2-\frac{\alpha_2\alpha_3}{K_{12}}\left(\frac{\alpha_1}{K_{12}}-K_{13}\right)-\frac{\alpha_1\alpha_3}{K_{12}}\left(K_{23}-\frac{\alpha_2}{K_{12}}\right)+\alpha_2^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\frac{\alpha_3}{K_{12}}\left(\alpha_2K_{13}-\alpha_1K_{23}\right)=$$

$$=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_3^2\left(\sigma_\xi^0,\overline{\alpha}(\xi)\right)=\left|\overline{\alpha}(\xi)\right|^2.$$

Замечание: Утверждение теоремы 3 равносильно условию Лопатинского [6].

Замечание: Этим были приведены достаточные условия для справедливости системы (7.73) из книги Бицадзе А.В. [12] и определены коэффициенты этой системы.

Теорема 4. При условиях теоремы 3, если $\alpha(x)$ также принадлежит некоторому классу Гельдера, поставленная задача (1), (2) фредгольмова.

Действительно, из теоремы 3 следует, что соотношения (2) и (9) дают возможность получить для функций $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, $\left(i=\overline{1,3}\right)$, $x\in\Gamma$ нормальную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Если к полученным соотношениям присоединить первое выражение из (3), то получится компактная, т.е. полная система. Полученная система – фредгольмова второго рода, а ядро содержит слабую особенность.

Замечание: Если $\alpha_1(x)\equiv\alpha_2(x)\equiv 0,\ \ \alpha_3(x)\equiv 1$, то, как видно из (7), $K_{12}(\xi,\xi)\equiv 0$, и для справедливости системы (6) $\beta_3(\xi)\equiv 0$. В этом случае система (6) имеет единственное нормальное решение $\left(K_{31}(\xi,\xi),\ K_{32}(\xi,\xi),\ 0\right)$. Поэтому не имеет место утверждение теоремы 3 и поставленная задача не фредгольмова.

Теорема 5. Если при условиях 1^0– 2^0 полученная система линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода разрешима, то тогда решение граничной задачи (1), (2) представляется в виде:

$$u(x)=\int\limits_{\Gamma}\frac{dU(x-\xi)}{dn_\xi}u(\xi)d\xi-\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\Gamma}U(x-\xi)\frac{\partial U(\xi)}{\partial\xi_j}\cos\left(n_\xi,x_j\right)d\xi,\quad x\in D. \quad (10)$$

Замечание: Если вдоль некоторого многообразия $\Gamma_0\subset\Gamma$ не имеет место утверждение теоремы 3, то для фредгольмовости поставленных задач на $\boldsymbol{\Gamma_0}$ следует задавать дополнительное граничное условие.

Этим методом были исследованы различные задачи, некоторые из которых перечислим:

1. граничные задачи с нелокальными условиями для уравнения эллиптического типа [21], [22], [23];
2. граничные задачи для интегро-дифференциального уравнения с частными производными с нелокальными и глобальными слагаемыми в граничном условии [24], [25];
3. задача Коши и граничная задача для уравнения Навье-Стокса [26], [27], [28], [29], [30];
4. задача Коши и смешанная задача для уравнения параболического типа [31], [32], [33];
5. обратная задача Стефана [34], [35].

Если вас интересуют задача Стеклова, граничные задачи для уравнения смешанного типа, составного типа, эллиптического типа первого порядка, уравнение Бицадзе, задачи для погранслоя, задача для нагруженного уравнения и другие задачи, то вы можете обратиться к сайту http//nihan.aliev.info.

ЛИТЕРАТУРА

1. Giraud G. Equations and integrals // Ann, Suent. Ecale narm, Super, 51, et 4, fase 3, 1934, p.251-372.
2. Giraud G. Sur certains operations du tupe elliptigul // C.r.Acad, Sci, 200, 1935, p.1651-1653.
3. Бицадзе А.В. Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Сообщ.АН Груз.ССР, 1944, 5, 8, ,с.761-770.
4. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л.:, Гостехиздат, 1948, 432 с.
5. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.-Л.:, Гостехиздат, 1950, 396 с .
6. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для систем уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. матем. журнал, 1953, т.5, с.123-151.
7. Михлин С.Г. К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений // Вестник ЛГУ, 1956,№1, с.3-24.
8. Вольперт А.И. Об индексе краевых задач для системы гармонических функций с тремя независимыми переменными.// ДАН СССР, 1961,133, №1, с.13-15.
9. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: ГИФМЛ, 1962, 254 с.
10. Бицадзе А.В. К задаче с наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях.// Материалы совместного советско-американского симпозиума по уравнениям с частными производными. Сибирское отд.АН СССР, Новосибирск, 1963, с.133-136.
11. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964, 830 с.
12. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966, 203 с.
13. Товмасян Н.Е. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // ДУ, 1966,т.2, №1, с.3-23, №2, с.163-171.

14. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967, 512 с.
15. Янущаускас А. О безусловной разрешимости задачи с наклонной производной // ДУ, 1967,т.3, №1, с.89-96.
16. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Задача с косой производной // Мат.сборник, 1969, т.78, с.148-179.
17. Бицадзе А.В. К теории нефредгольмовых эллиптических краевых задач // Диф. ур-я с частными производными, Труды симпозиума, посвященного 60-летию акад. С.Л.Соболева, М.: Наука, 1976, с.69-70.
18. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. М.: Мир, 1970, 362 с.
19. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976, 280 с.
20. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981, 448 с.
21. Aliyev N., Jahanshahi M. Solution of Poisson's equation with global, local and nonlocal boundary conditions // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33 (2002), №.2, p.241-247.
22. Jahanshahi M., Aliyev N. Determining of an analytic function on its analytic domain by Cauchy-Riemann equation with special kind of boundary conditions // Southeast Asian Bulletin Mathematics, 28 (2004), №.1, p.33-39.
23. Hosseini S.M., Aliyev N. Sufficient conditions for the reduction of a BVP for PDE with non-local and global boundary conditions to Fredholm integral equations (on a rectangular domain). Applied Mathematics and Computation //147 (2004), №.3, p.669-685.
24. Magomed F. Mekhtiyev, Nihan A.Aliyev, Mehran R.Fatemi. On Fredholm property of a Boundary Value Problem for a first order equation with general boundary conditions // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2009, Baku, v. XXIX, №.4, p.221-226.
25. M.R.Fatemi and N.A.Aliyev. General Linear Boundary Value Program for the Second-Order Integro-Differential Loaded Equation with Boundary Conditions // Containing Both Nonlocal and Global Terms // Hindawi publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis, 2010, 12 p.
26. Aliyev N., Hosseini S.M. Cauchy problem for the Navier-Stokes equation and its reduction to a non-linear system of second kind Fredholm integral equations // International Journal of Pure and Applied Mathematics 3 (2002), №.3, p.317-324.
27. Aliev N., Rezapour Sh., Jahanshahi M. On Fefferman's Non-existence Problems. Mathematica Moravica Journal of University of Kragujevac, Serbia, 2007, v. 11, p.1-7.
28. Aliev N., Rezapour Sh., Jahanshahi M. A Mixed Problem for Navier-Stokes system // Mathematica Moravica Journal of University of Kragujevac, Serbia, 2008, v. 12-2, p. 1-14.
29. Aliev N., Rezapour Sh., Jahanshahi M. On a mixed problem for Navier-Stokes System in the Unit Cube // Mathematica Moravica, 2009, v. 13-1, 13-24.
30. M.Jahanshahi, N.Aliev. An Analytic Method for Investigation and Solving Two-Dimensional Steady State Navier-Stokes Equations I // Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2009, 33: p.749-763 (1075-1089).
31. Aliyev N., Hosseini S.M. An analysis of a parabolic problem with a general (non-local and global) supplementary linear conditions I // Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2002, №. 12, p.143-153 (2003)
32. Aliyev, N., Hosseini S.M. An analysis of a parabolic problem with a general (non-local and global) supplementary linear conditions II // Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2003, №.13, p.115-127.
33. Bahrami F., Aliyev N., Hosseini S.M. A method for the reduction of four dimensional mixed problems with general boundary conditions to a system of second kind Fredholm integral equations // Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2005, №.17, p. 91-104.

34. K.Ivaz, N.Aliyev. Nonlinear Two-Phase Stefan Problem // Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran; Autumn 2007, v.18, No. 4, p.329-337.
35. K.Ivaz, N.Aliyev. Control of the Moving Boundary // Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2010, №34: p. 439-450.

BİR ÇƏP TÖRƏMƏLİ ÜÇÖLÇÜLÜ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

M.F.MEHDİYEV, N.Ə.ƏLİYEV, N.İ.FOMİNA

XÜLASƏ

Burada üçölçülü oblastda Laplas tənliyi üçün çəp törəməli məsələyə baxılır. Sərhəd Lyapunov səthidir. Bu məsələnin fredholmluğu araşdırılır. Araşdırma üsulu zəruri şərtlərə əsaslanır. Aparılan sxemin potensial nəzəriyyəsindən üstünlüyü ondan ibarətdir ki, bizim halda limitə keçmək əməliyyatı yoxdur. Biz ancaq sərhəd qiymətlərindən istifadə edirik ki, onlar da əsas münasibətlərdən alınan zəruri şərtlərdir. Bir daha qeyd edək ki, sərhəddə verilmiş törəmənin istiqaməti ixtiyaridir. Sərhədin müəyyən alt çoxluğunda toxunan da ola bilər.

Açar sözlər: çəp törəmə, zəruri şərtlər, requlyarlaşdırma.

ON ONE THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH INCLINED DERIVATIVES

M.F.MEHDIYEV, N.A.ALIYEV, N.I.FOMINA

SUMMARY

A boundary-value problem with inclined derivatives in three-dimensional space with boundaries-surfaces of Lyapunov type is considered. Fredholm property of boundary problems is investigated. The method of investigation is based on the necessary conditions. The advantage compared to the theory of potentials is that we don't have a limit passage, we use boundary values which are obtained from the principal relationships named necessary conditions. Remark that the directions of the derivatives which are given in the boundary conditions are arbitrary. Some subset of the specified directions can be tangent as well.

Key words: inclined derivative, necessary conditions, regularization.

Поступила в редакцию: 05.03.2011 г.
Принято к печати: 17.06.2011 г.